

CALCUL DES FREQUENCES DE VIBRATION ET DE LA FONCTION D'AMPLIFICATION D'UN PROFIL DE SOL A CARACTERISTIQUES GEOTECHNIQUES VARIABLES AVEC LA PROFONDEUR

Par

Hamid AFRA

Docteur ENPC Paris

Chargé de Recherche au CGS Alger, Enseignant à l'ENTP Alger

Résumé

Dans cet article, on présente une méthode de calcul des fréquences de vibration et de la fonction d'amplification d'un profil de sol à stratification horizontale et à caractéristiques géotechniques variables avec la profondeur, à partir d'un essai Cross-Hole réalisé sur site. Les résultats obtenus sont présentés sous forme d'abaque pour les fréquences de vibration et sous forme analytique pour la fonction d'amplification.

Mots clés : dynamique des sols - fréquences de vibration - propagation d'ondes de cisaillement - fonction d'amplification - équation de Bessel.

1 INTRODUCTION

La connaissance des fréquences de vibration et en particulier la fréquence fondamentale d'un profil de sol est importante dans une phase d'avant projet et de conception d'ouvrages à édifier sur le site. Un système linéaire est entièrement défini par sa fonction de transfert qui est une caractéristique intrinsèque du système. La donnée de la fonction de transfert d'un profil de sol permet de prédire le mouvement sismique en tout point du sol et en particulier en surface libre à partir d'une excitation générée au niveau du substratum rocheux. Par conséquent, l'amplification des caractéristiques du mouvement sismique peut être estimée. Si on suppose que le profil du sol est à stratification horizontale, le mouvement sismique résultant d'une excitation au substratum rocheux est seulement dû aux déformations de cisaillement du sol et par conséquent le profil peut être considéré comme une colonne de sol encastrée à

sa base. En basses amplitudes de l'excitation sismique, le comportement du sol peut être considéré comme élastique linéaire. Cependant, ses caractéristiques géotechniques et en particulier le module de cisaillement, varient en fonction de la profondeur à partir de la surface libre. Les expériences ont montré que cette variation est en puissance de la profondeur (Richart, E. E. et al ¹⁹⁷⁰ [1]). Par exemple (Gazetas, G. ¹⁹⁸⁰ [2]), pour un site uniforme d'argile molle normalement consolidée, le module de cisaillement du sol varie linéairement en fonction de la profondeur z , pour un site uniforme de sols cohérents, il varie en racine carrée de z et pour un site d'argile raide surconsolidée, il est constant. On peut généraliser cette loi de variation du module de cisaillement en fonction de la profondeur z sous la forme :

$$G(z) = G_0 z^P,$$

Pour les autres types de sols, la détermination des paramètres P et G_0 peut se faire à partir d'un essai Cross-Hole.

2 Détermination des paramètres de la loi à partir d'essai Cross-Hole

On suppose donc une loi de variation du module de cisaillement comme indiqué précédemment. La vitesse de l'onde de cisaillement peut s'écrire sous la forme :

$$v(z) = \frac{V_s}{h^{P/2}} z^{P/2}$$

où V_s désigne la valeur de la vitesse de l'onde de cisaillement à la profondeur h (h étant l'épaisseur du profil). Soit

$v'(z_i)$ le profil des vitesses des ondes de cisaillement fournies par l'essai Cross-Hole. Le paramètre p peut être déterminé en minimisant, au sens des moindres carrés, l'écart entre les valeurs réelles $v'(z_i)$ et les valeurs théoriques $v(z_i)$. On définit cet écart $E(p)$ par :

$$E(p) = \int_0^h (\text{Log } v(z_i) - \text{Log } v'(z_i))^2 dz_i \quad (1)$$

Le minimum de $E(p)$ est obtenu sous les deux conditions suivantes :

$$\frac{dE(p)}{dp} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2E(p)}{dp^2} > 0 \quad (2)$$

La résolution de cette équation (2) donne la valeur suivante du paramètre p :

$$p = \frac{h \text{Log } v_s + \int_0^h [\text{Log } v(z_i) (\text{Log } z_i - \text{Log } h)] dz_i}{h} \quad (3)$$

Le terme intégral de l'équation (3) peut s'intégrer numériquement pour déterminer le paramètre p .

3 EQUATION DE MOUVEMENT

Il s'agit donc d'estimer analytiquement les fréquences de vibration du profil de sol ci-dessous (Figure 1) et de calculer sa fonction de transfert à partir duquel l'amplification du mouvement sismique peut être calculée en surface libre. La couche du sol a une profondeur h , une masse volumique ρ , constante avec la profondeur et un module de cisaillement $G(z)$, variable avec la profondeur. Les principaux résultats présentés dans cette partie sont extraits de H. Afra et A. Pecker ¹⁹⁹² [3].

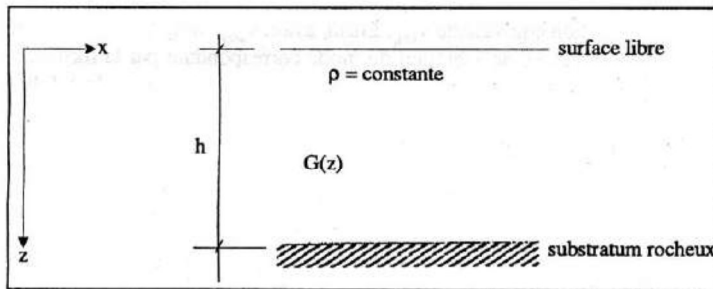


Figure 1 : Profil de sol.

la vitesse de propagation de l'onde de cisaillement est de la forme :

$$v(z) = \frac{v_s}{h^{p/2}} z^{p/2} \quad (4)$$

où v_s désigne la valeur de la vitesse de l'onde de cisaillement à la profondeur h (au niveau du substratum rocheux),

fournie par l'essai Cross-Hole et p le paramètre déterminé par l'équation (3).

L'équation de propagation s'écrit :

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} [G(z) \frac{\partial x}{\partial z}] \quad (5)$$

z est la variable spatiale verticale, t est la variable temps et $x = x(z,t)$ est le déplacement horizontal du sol.

La solution générale de l'équation (5) est une série infinie. Si on considère que la couche du sol vibre dans un mode donné à la fréquence ω (rad/s), la solution de (5) s'écrit, en supposant un découplage modal :

$$x(z,t) = X(z) e^{i\omega t} \quad (6)$$

$X(z)$ est la déformée modale du mode de vibration considéré et $i^2 = -1$. En substituant cette équation dans (5) et en tenant compte de (4), on obtient l'équation d'équilibre modale suivante :

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{p}{z} \frac{dX}{dz} + \frac{\omega^2 h^p}{v_s^2 z^p} X = 0 \quad (7)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

- ♦ déplacement relatif nul à l'interface substratum rocheux-sol : $X(z=h) = 0$
- ♦ contrainte de cisaillement nulle à la surface libre :

$$G(z) \frac{dX}{dz} \Big|_{z=0} = 0$$

- ♦ La forme modale normalisée à l'unité en surface libre : $X(z=0) = 1$

4 RESOLUTION DE L'EQUATION D'EQUILIBRE

L'équation d'équilibre (7) est une équation différentielle non linéaire, en posant :

$$\mu^2 = \frac{\omega^2 h^p}{v_s^2}, \quad \text{elle peut s'écrire :}$$

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{p}{z} \frac{dX}{dz} + \frac{\mu^2}{z^p} X = 0 \quad (8)$$

On recherche la solution de (8) sous la forme :

$$X = A z^\alpha J_\nu(\lambda z^q) \quad (9)$$

J_ν désigne une fonction à déterminer, A est une constante indépendante de z mais pouvant dépendre de ω ; α , λ et q sont des constantes à déterminer. Après dérivation de l'expression (9) et remplacement dans l'équation (8), on obtient l'équation suivante :

$$J_v'' + \frac{p+2\alpha+q-1}{q} \frac{1}{t} J_v' + \left[\frac{p\alpha+\alpha(\alpha-1)}{q^2} \frac{1}{t^2} + \frac{\mu^2}{\lambda^2 q^2} z^{2-p-2q} \right] J_v = 0 \quad (10)$$

En identifiant l'équation (10) à la forme générale de l'équation différentielle de Bessel

$$J_v'' + \frac{1}{t} J_v' + \left[1 - \frac{v^2}{t^2} \right] J_v = 0 \quad (11)$$

On obtient alors par identification :

$$\begin{aligned} \frac{p+2\alpha+q-1}{q} &= 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1-p}{2} \\ 2-p-2q &= 0 \Rightarrow q = \frac{2-p}{2} \\ \frac{\mu^2}{\lambda^2 q^2} &= 1 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\mu}{q} \end{aligned}$$

La solution générale est donc de la forme :

$$X(z) = A z^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2\omega h^{p/2}}{v_s(2-p)} z^{\frac{2-p}{2}} \right) \quad (12)$$

Vérification des conditions aux limites

▲ déplacement nul à l'interface ($z=h$) :

$$X(z=h) = 0 \Rightarrow J_{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2\omega_i h}{v_s(2-p)} \right) = 0 \Rightarrow \frac{2\omega_i h}{v_s(2-p)} = r_i$$

où ω_i désigne la fréquence de vibration du mode i et r_i est la i ème racine de l'équation de Bessel :

$$J_{\frac{p-1}{2-p}}(r_i) = 0 \Rightarrow \omega_i = \frac{v_s(2-p)r_i}{2h}$$

Les fréquences de vibration de la couche du sol sont donc données par :

$$f_i = \frac{v_s(2-p)r_i}{4\pi h} \quad (13)$$

● contrainte de cisaillement nulle en surface libre :

$$\lim_{z \rightarrow 0} G(z) \frac{dX}{dz} = 0 : \text{condition vérifiée}$$

● forme modale normalisée à l'unité en surface libre :

$$X(0) = 1 \Rightarrow A = \left[\frac{v_s(2-p)}{\omega h^{p/2}} \right]^{\frac{p-1}{2-p}} \Gamma\left(\frac{1}{2-p}\right)$$

où Γ désigne la fonction Gamma.

La solution générale s'écrit donc :

$$X(z) = \left[\frac{v_s(2-p)}{\omega h^{p/2}} \right]^{\frac{p-1}{2-p}} \Gamma\left(\frac{1}{2-p}\right) z^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2\omega h^{p/2}}{v_s(2-p)} z^{\frac{2-p}{2}} \right) \quad (14)$$

On définit V_{seq} , comme étant la vitesse de propagation constante de l'onde de cisaillement d'un profil de sol équivalent qui donnerait les mêmes fréquences de vibration f_i (équation 13). Soit :

$$v_{seq} = \frac{v_s(2-p)r_i}{\pi(2i-1)} \quad (15)$$

Soit z_{eq} , la profondeur à laquelle la vitesse de propagation $v(z)$ vaut v_{seq} . En combinant (4) et (15), on obtient :

$$\frac{z_{eq}}{h} = \left[\frac{(2-p)r_i}{\pi(2i-1)} \right]^{\frac{2}{p}} \quad (16)$$

Pour une valeur de p donnée, on détermine pour les différents modes i , les valeurs correspondantes de $\frac{z_{eq}}{h}$ à partir de l'abaque donné en figure 2. Ensuite, pour toute hauteur h du profil, on détermine z_{eq} qu'on introduit dans l'équation :

$$v_{seq} = \frac{v_s}{h^{p/2}} z_{eq}^{p/2} \quad \text{pour déterminer la vitesse de propagation équivalente } v_{seq}.$$

Enfin, ayant v_{seq} , on détermine la fréquence de vibration du mode correspondant par la formule donnant les fréquences de vibration d'une couche de sol de hauteur h et de vitesse de propagation constante v_{seq} :

$$f_i = (2i-1) \frac{v_{seq}}{4h}$$

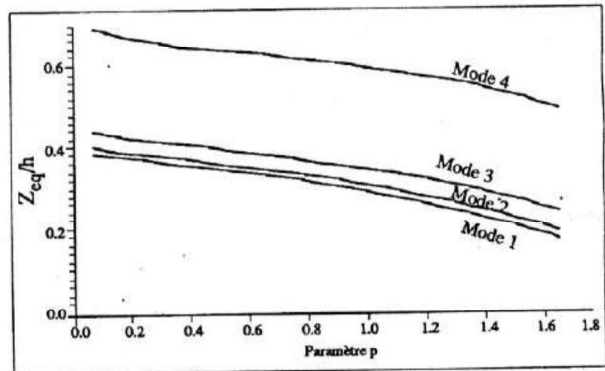


Figure 2 : Détermination des fréquences de vibration.

5 CALCUL DE LA FONCTION D'AMPLIFICATION

L'équation de propagation dans le milieu 1 (Figure 3) s'écrit :

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[G_1(z) \frac{\partial u_1}{\partial z} \right]$$

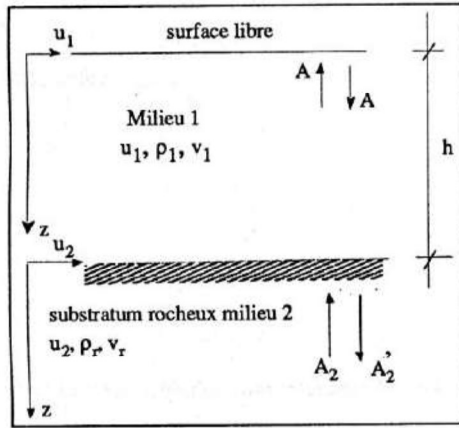


Figure 3 : Profil du sol : calcul de la fonction d'amplification.

On a montré que la solution de cette équation dans le cas où la vitesse de propagation de l'onde de cisaillement varie selon la loi (4), est donnée par l'équation (14).

Dans le milieu 2 (*substratum rocheux*), le déplacement est de la forme :

$$u_2(z) = A_2 e^{i\omega z/v_r} + A_2' e^{-i\omega z/v_r}$$

Conditions de continuité à l'interface substratum rocheux-couche du sol :

- continuité du déplacement : $u_1(h) = u_2(0)$, on obtient l'équation suivante :

$$A_2 + A_2' = \left[\frac{v_s(2-p)}{\omega h^{p/2}} \right]^{\frac{p-1}{2-p}} \Gamma\left(\frac{1}{2-p}\right) h^{\frac{1-p}{2}} \times J_{\frac{p-1}{2-p}}\left(\frac{2\omega h}{v_s(2-p)}\right) \quad (17)$$

- continuité de la contrainte de cisaillement :

$$G_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = G_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$A_2 - A_2' = i q \left[\frac{v_s(2-p)}{\omega h^{p/2}} \right] \Gamma\left(\frac{1}{2-p}\right) h^{\frac{1-p}{2}} \times J_{\frac{1}{2-p}}\left(\frac{2\omega h}{v_s(2-p)}\right) \quad (18)$$

avec

$$q = \frac{\rho_1 v_s}{\rho_r v_r}$$

La résolution du système d'équations (17) et (18) donne les amplitudes A_2 et A_2' . La fonction d'amplification entre la surface libre et l'affleurement rocheux est donnée par :

$$T_{1,2}^*(\omega) = \frac{1}{A_1 + qB_1} \quad (19)$$

avec

$$A_1 = \left[\frac{v_s(2-p)}{\omega h^{p/2}} \right]^{\frac{p-1}{2-p}} \Gamma\left(\frac{1}{2-p}\right) h^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{p-1}{2-p}}\left(\frac{2\omega h}{v_s(2-p)}\right)$$

$$B_1 = i \left[\frac{v_s(2-p)}{\omega h^{p/2}} \right]^{\frac{p-1}{2-p}} \Gamma\left(\frac{1}{2-p}\right) h^{\frac{1-p}{2}} J_{\frac{1}{2-p}}\left(\frac{2\omega h}{v_s(2-p)}\right)$$

6 PRISE EN COMPTE DE L'AMORTISSEMENT

La prise en compte de l'amortissement peut se faire par l'introduction d'un module de cisaillement complexe de la forme :

$G_1(z) = G_1(1+2i\beta)$ où β désigne le coefficient d'amortissement supposé constant avec la profondeur. Par conséquent toutes les équations précédentes restent valables à condition de remplacer :

$$v_s \quad \text{par} \quad v_s \sqrt{1+2i\beta}$$

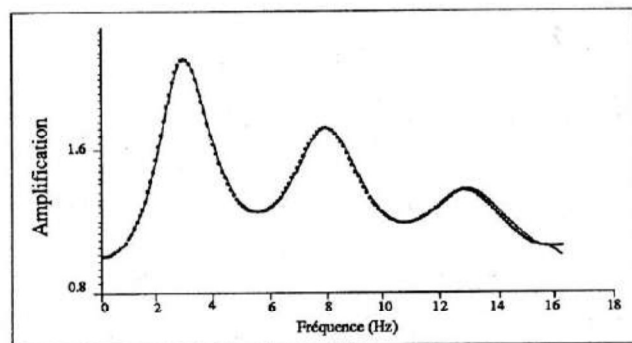


Figure 4 : Comparaison du module de la fonction de transfert donnée par SHAKE (*) et celle donnée par la méthode analytique (—).

7 EXEMPLE D'APPLICATION

L'exemple d'application est un profil de sol de 30m de hauteur, de caractéristiques :

$$v(z) = 170.91 z^{1/4}, \text{ soit } v_s = 400\text{m/s} \\ \beta = 0.08, q = 0.46.$$

Le module de la fonction de transfert obtenu par cette méthode est comparé en figure 4 au module de la fonction de transfert donnée par le programme SHAKE [4]. On note une parfaite cohérence des résultats obtenus.

8 CONCLUSION

La méthode présentée permet d'estimer à partir d'un abaque les fréquences de vibration d'un profil de sol à stratification horizontale et à caractéristiques géotechniques variables avec la profondeur. Les paramètres de la loi de variation de ces caractéristiques peuvent être obtenus à partir d'un essai Cross-Hole ou à partir de la littérature pour certains types de sol. La fonction de transfert du profil est estimée analytiquement sans avoir recours à l'utilisation d'un programme de propagation d'ondes. Cette fonction permet de calculer l'amplification du mouvement sismique en surface libre à partir de la connaissance des caractéristi-

ques sismiques au niveau du substratum rocheux. De même, à partir du mouvement sismique enregistré en général en surface libre, elle permet par déconvolution de déterminer le mouvement à la base. Dans cet article, le profil de sol mono-couche a été traité, il est évident que les résultats peuvent facilement être étendus aux multi-couches en vérifiant les conditions de continuité aux interfaces ①

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. E. Richart, J. R. Hall and R. D. Woods (1970) : "Vibration of soils and foundations". Prentice Hill, New Jersey.
- [2] G. Gazetas (1984) : "Seismic response of end-bearing single piles". Soil dynamics and earthquake engineering, vol 3, N° 2.
- [3] H. Afra et A. Pecker (1992) : "Effets de site : évaluation de la fonction de transfert". Rapport de recherche Géodynamique et Structures-CEA, France.
- [4] Shake : "A computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites". By P. B. Schnabel, J. Lysmer et H. B. Seed, EERC 72-12, Décembre 1972.

Abonnez-vous à 'Algerie EQUIPEMENT'

- ✉ Pour marquer votre soutien à la première publication scientifique de GC et des TP.
- ✉ Pour recevoir rapidement chaque numéro, dès sa parution.

BULLETIN D'ABONNEMENT

(à découper ou à recopier)

Nom et Prénom (ou raison sociale) :

Adresse :

Code Postal : Ville :

Profession (facultatif) :

Nombre d'abonnements :

Mode de règlement :

☐ Par virement au CCP N° 19 348/92 Alger

Chèque à l'ordre de l'Agent comptable ENTP

Par virement à la trésorerie centrale d'Alger N° 403